

Analiza Funkcjonalna

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 11

Twierdzenie Hahna-Banacha

math.uwb.edu.pl/~zaf/kwasniewski/pdf/skrypt.pdf

Lem1. Niech X zespolona przestrzeń unormowana. Funkcjonał $f : X \rightarrow \mathbb{C}$ jest $\mathbb{C}$ -liniowy $\iff f(x) = u(x) + iu(-ix)$, gdzie $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest funkcjonałem $\mathbb{R}$ -liniowym. Ponadto, $\|f\| = \|u\|$.

Dowód: “ $\implies$ ” Jeśli f jest $\mathbb{C}$ -liniowy, to $u := \operatorname{Re} f$ jest $\mathbb{R}$ -liniowy i

$$\operatorname{Im} f(x) = \operatorname{Im}[i(-i)f(x)] = \operatorname{Im} if(-ix) = \operatorname{Re} f(-ix) = u(-ix).$$

Zatem $f(x) = u(x) + iu(-ix)$. Ponadto,

$$\|u\| = \sup_{\|x\|=1} |u(x)| = \sup_{\|x\|=1} |\operatorname{Re} f(x)| \leq \sup_{\|x\|=1} |f(x)| = \|f\|.$$

“ $\impliedby$ ” Jeśli $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\mathbb{R}$ -liniowy, to $f(x) := u(x) + iu(-ix)$ definiuje funkcjonał $f : X \rightarrow \mathbb{C}$, który jest $\mathbb{C}$ -liniowy. 

Niech $x \in X$, $\|x\| = 1$, oraz $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| = 1$. t. że $\lambda f(x) = |f(x)|$.
Wtedy

$$|f(x)| = \lambda f(x) = f(\lambda x) = \operatorname{Re} f(\lambda x) = u(\lambda x) \leq \|u\|.$$

Czyli $\|f\| \leq \|u\|$.



Def. Niech X przestrzeń liniowa nad $\mathbb{R}$. **Funkcjonałem Banacha** nazywamy funkcję $p : X \rightarrow \mathbb{R}$ taką, że

- ① $\forall_{x,y \in X} p(x+y) \leq p(x) + p(y),$ (nierówność trójkąta)
- ② $\forall_{x \in X} \forall_{t>0} p(tx) = tp(x).$ (dodatnia jednorodność)

Prz. Funkcjonały liniowe, normy oraz półnormy.

Tw. (Lemat Banacha)

$$\left(\begin{array}{l} X_0 \subseteq X \text{ podprzestrzeń liniowa} \\ f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{R} \text{ funkcjonal liniowy} \\ p : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ funkcjonal Banacha} \\ \forall_{x \in X_0} f_0(x) \leq p(x) \end{array} \right) \implies \begin{array}{l} \text{istnieje funkcjonal} \\ \text{liniowy } f : X \rightarrow \mathbb{R}, \\ \text{taki, że } f|_{X_0} = f_0 \text{ i} \\ \forall_{x \in X} f(x) \leq p(x) \end{array}$$

Dowód: Dowód składa się z dwóch kroków.

- 1) Stosując Lemat Kuratowskiego-Zorna, wykazujemy, że istnieje maksymalne rozszerzenie f majoryzowane przez p .
- 2) Pokazujemy, że to maksymalne rozszerzenie jest określone na całej przestrzeni X .

1) Niech Φ będzie zbiorem wszystkich liniowych przedłużeń dominowanych przez p , tzn.

$$\Phi := \{(\varphi, X_\varphi) : X_\varphi \text{ podprzestrzeń liniowa zawierająca } X_0, \\ \varphi : X_\varphi \rightarrow \mathbb{R} \text{ funkcjonal liniowy} \\ \text{taki, że } \varphi|_{X_0} = f_0 \text{ oraz } \varphi \leq p|_{X_\varphi}\}.$$

Na Φ wprowadzamy relację częściowego porządku:

$$(\varphi_1, X_{\varphi_1}) \prec (\varphi_2, X_{\varphi_2}) \stackrel{\text{def}}{\iff} X_{\varphi_1} \subseteq X_{\varphi_2} \text{ oraz } \varphi_2|_{X_{\varphi_1}} = \varphi_1.$$

Każdy zbiór liniowo-uporządkowany $\{(\varphi_i, X_i)\}_{i \in I}$ ma ograniczenie górne (φ, X_φ) , gdzie $X_\varphi := \bigcup_{i \in I} X_{\varphi_i}$ oraz $\varphi(x) := \varphi_i(x)$ gdy $x \in X_{\varphi_i}$. Zatem na mocy Lematu Kuratowskiego-Zorna istnieje element maksymalny $(\varphi_m, X_{\varphi_m})$ w Φ .

2) Jeśli $X_{\varphi_m} = X$, to kładąc $f = \varphi_m$ zakończymy dowód. Załóżmy nie wprost, że istnieje $x_0 \in X \setminus X_{\varphi_m}$ i połóżmy

$$\tilde{X} := \text{lin}\{X_{\varphi_m}, x_0\} = \{x + \lambda x_0 : x \in X_{\varphi_m}, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Dla dowolnego $u \in \mathbb{R}$ wzór

$$\varphi_u(x + \lambda x_0) := \varphi_m(x) + \lambda u, \quad x \in X_{\varphi_m}, \lambda \in \mathbb{R},$$

definiuje funkcjonal liniowy $\varphi_u : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{R}$, który przedłuża φ_m .



Pytanie: Czy możemy dobrać $u \in \mathbb{R}$ tak, aby p majoryzowało φ_u ?

$$\forall_{\tilde{x} \in \tilde{X}} \varphi_u(\tilde{x}) \leq p(\tilde{x}) \iff \forall_{x \in X_{\varphi_m}, \lambda \in \mathbb{R}} \varphi_m(x) + \lambda u \leq p(x + \lambda x_0)$$

$$\iff \forall_{x \in X_{\varphi_m}, \lambda > 0} \begin{cases} u \leq \frac{1}{\lambda} (p(x + \lambda x_0) - \varphi_m(x)) \\ u \geq -\frac{1}{\lambda} (p(x - \lambda x_0) - \varphi_m(x)) \end{cases}$$

$$\stackrel{\text{Jednor. } p}{\iff} \forall_{x \in X_{\varphi_m}, \lambda > 0} \begin{cases} u \leq p\left(\frac{x}{\lambda} + x_0\right) - \varphi_m\left(\frac{x}{\lambda}\right) \\ u \geq -p\left(\frac{x}{\lambda} - x_0\right) + \varphi_m\left(\frac{x}{\lambda}\right) \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} u \leq b := \inf \{p(x + x_0) - \varphi_m(x) : x \in X_{\varphi_m}\} \\ u \geq a := \sup \{-p(x - x_0) + \varphi_m(x) : x \in X_{\varphi_m}\}. \end{cases}$$

Jeśli $a \leq b$, to dowolnego $u \in [a, b]$ otrzymamy $(\varphi_u, \tilde{X}) \in \Phi$,

który jest rozszerzeniem elementu maksymalnego $(\varphi_m, X_m) \in \Phi$



Ale dla dowolnych $x_1, x_2 \in X_{\varphi_m}$ mamy

$$\begin{aligned} p(x_1 + x_0) - \varphi_m(x_1) - (-p(x_2 - x_0) + \varphi_m(x_2)) \\ = p(x_1 + x_0) + p(x_2 - x_0) - \varphi_m(x_1 + x_2) \quad (\text{N. trójkąta dla } p) \\ \geq p(x_1 + x_2) - \varphi_m(x_1 + x_2) \geq 0 \quad (\text{bo } \varphi_m \leq p). \end{aligned}$$

Stąd $b \geq a$.

Funkcjonały przedłużają się z zachowaniem normy !

Twierdzenie Hahna-Banacha

Niech X będzie przestrzenią unormowaną nad ciałem $\mathbb{F} = \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

Każdy ograniczony funkcjonał liniowy $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{F}$ określony na podprzestrzeni liniowej $X_0 \subseteq X$ **przedłuża się** do ograniczonego funkcjonału liniowego $f : X \rightarrow \mathbb{F}$ takiego, że $\|f\| = \|f_0\|$.

Dowód: (1) Załóżmy, że $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Wtedy $p(x) := \|x\| \cdot \|f_0\|$, $x \in X$, jest funkcjonałem Banacha takim, że $f_0 \leq p$ na X_0 . Zatem na mocy Lematu Banacha istnieje funkcjonał liniowy $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ taki, że $f|_{X_0} = f_0$ oraz $f \leq p$ na X . Stąd

$$\|f\| = \sup_{\|x\|=1} |f(x)| \leq \sup_{\|x\|=1} p(x) = \sup_{\|x\|=1} \|x\| \cdot \|f_0\| = \|f_0\|.$$



Czyli f ograniczony oraz $\|f\| \leq \|f_0\|$. Nierówność w drugą stronę jest oczywista:

$$\|f_0\| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X_0}} |f_0(x)| = \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X_0}} |f(x)| \leq \sup_{\substack{\|x\|=1 \\ x \in X}} |f(x)| = \|f\|.$$

(2) Załóżmy, że $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Na mocy **Lem1** $f_0(x) = u_0(x) + iu_0(-ix)$, gdzie $u_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{R}$ jest $\mathbb{R}$ -liniowy oraz $\|u_0\| = \|f_0\|$. Z kroku (1) wiemy, że u_0 przedłuża się do funkcjonału $\mathbb{R}$ -liniowego $u : X \rightarrow \mathbb{R}$ takiego, że $\|u\| = \|u_0\| = \|f_0\|$. Zatem korzystając jeszcze raz z **Lem1** otrzymujemy, że wzór

$$f(x) := u(x) + iu(-ix), \quad x \in X,$$

definiuje $\mathbb{C}$ -linowe przedłużenie f_0 oraz $\|f\| = \|u\| = \|f_0\|$. ■

Wn1. Dla każdego $x \in X \setminus \{0\}$ istnieje funkcjonał $f \in X^*$ taki, że

$$\|f\| = 1 \quad \text{oraz} \quad f(x) = \|x\|.$$

W szczególności, funkcjonały ograniczone **rozdzielają punkty** przestrzeni X , tzn. $\forall_{x,y \in X} \quad x \neq y \implies \exists_{f \in X^*} \quad f(x) \neq f(y)$.

Dowód: Niech $x \in X \setminus \{0\}$. Połóżmy $X_0 := \text{lin}\{x\}$ i zdefiniujmy $f_0 : X_0 \rightarrow \mathbb{F}$ wzorem $f_0(\lambda x) = \lambda \|x\|$, $\lambda \in \mathbb{F}$. Wtedy $f_0 \in X_0^*$ oraz $\|f_0\| = 1$  Zatem f_0 przedłuża się dożądanego funkcjonału f na mocy Tw. Hahna-Banacha.

W szczególności, jeśli $x \neq y$, to $x - y \neq 0$, a więc istnieje $f \in X^*$ taki, że $f(x - y) = \|x - y\| \neq 0$, skąd $f(x) \neq f(y)$. ■

Wn2. Każda przestrzeń unormowana X zanurza się w przestrzeń podwójnie sprzężoną $X^{**} := (X^*)^*$. Dokładniej, mamy liniową izometrię $i : X \rightarrow X^{**}$ daną wzorem

$$i(x)(f) := f(x) \quad x \in X, f \in X^*.$$

Dowód: Niech $x \in X$. Funkcjonał $i(x) : X^* \rightarrow \mathbb{F}$ jest liniowy:

$$i(x)(\lambda f_1 + f_2) = (\lambda f_1 + f_2)(x) = \lambda f_1(x) + f_2(x) = \lambda i(x)f_1 + i(x)f_2$$

$$\text{oraz } \|i(x)\|_{X^{**}} = \sup_{\|f\|_{X^*}=1} |i(x)(f)| = \sup_{\|f\|_{X^*}=1} |f(x)| \leq \|x\|_X.$$

Czyli $i(x) \in X^{**}$ oraz $\|i(x)\|_{X^{**}} \leq \|x\|_X$.

Aby wykazać nierówność przeciwną możemy założyć, że $x \neq 0$. Wtedy na mocy **Wn1** istnieje $f \in X^*$ taki, że $\|f\|_{X^*} = 1$ oraz $f(x) = \|x\|_X$. Zatem $\|i(x)\|_{X^{**}} = \|x\|_X$. Czyli odwzorowanie

$$X \ni x \rightarrow i(x) \in X^{**}$$

jest poprawnie określoną izometrią. Ta izometria jest liniowa, bo

$$\begin{aligned} i(\lambda x_1 + x_2)(f) &= f(\lambda x_1 + x_2) = \lambda f(x_1) + f(x_2) \\ &= \lambda i(x_1)(f) + i(x_2)(f) = (\lambda i(x_1) + i(x_2))(f). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Def. X jest **przestrzenią refleksywną** jeśli $i : X \rightarrow X^{**}$ jest izomorfizmem, czyli gdy każdy funkcjonał na X^* jest postaci $X^* \ni f \mapsto f(x) \in \mathbb{F}$ dla pewnego $x \in X$.

Przykłady

Refleksywne	Nierefleksywne
przestrzenie skończone wymiarowe, przestrzeń Hilberta, przestrzeń L^p dla $1 < p < \infty$	c_0 , $C[a, b]$, ℓ^1 , ℓ^∞ , $L^1([a, b])$, $L^\infty([a, b])$

Tw. (Przestrzeń dualna do L^p)

Dla $1 \leq p < \infty$ oraz dowolnej przestrzeni z miarą (Ω, Σ, μ) (σ -skończoną, gdy $p = 1$) mamy naturalny izometryczny izomorfizm

$$L^p(\mu)^* \cong L^q(\mu), \quad \text{gdzie} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Dokładniej, dla każdego $f \in L^p(\mu)^*$ istnieje $y \in L^q(\mu)$ taki, że

$$f(x) = \int_{\Omega} x \cdot y \, d\mu, \quad x \in L^p(\mu).$$

Ponadto, wtedy $\|f\| = \|y\|_q = \begin{cases} (\int_{\Omega} |y|^q \, d\mu)^{\frac{1}{q}}, & p > 1, \\ \text{ess sup } |y|, & p = 1. \end{cases}$

Wn1. Dla $1 \leq p < \infty$ mamy $(\ell^p)^* \cong \ell^q$, gdzie $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Tzn.

$$f \in (\ell^p)^* \iff \exists_{y \in \ell^q} \forall_{x \in \ell^p} f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k) \quad \text{i} \quad \|f\| = \|y\|_q.$$

Wn2. Przestrzenie $L^p(\mu)$, ℓ^p dla $1 < p < \infty$ są refleksywne.

Dowód: Skoro $p > 1$, to istnieje skończone $q > 1$ takie, że $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ (mianowicie $q = \frac{1}{1-p}$). Stosując dwukrotnie Twierdzenie

$$L^p(\mu)^{**} = (L^p(\mu)^*)^* \cong L^q(\mu)^* \cong L^p(\mu). \quad \blacksquare$$

Lem. $c_0^* \cong \ell^1$. Dokładniej $f \in c_0^* \iff$ istnieje $y \in \ell^1$ taki, że dla każdego $x \in c_0$ mamy $f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)y(k)$, oraz wtedy $\|f\| = \|y\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} |y(k)|$.

Dowód: 

Wn. c_0 nie jest refleksywna

Dowód: $c_0^{**} = (c_0^*)^* \cong (\ell^1)^* \cong \ell^\infty$, ale $c_0 \not\cong \ell^\infty$, bo np. c_0 jest przestrzenią ośrodkową, a ℓ^∞ nie. 